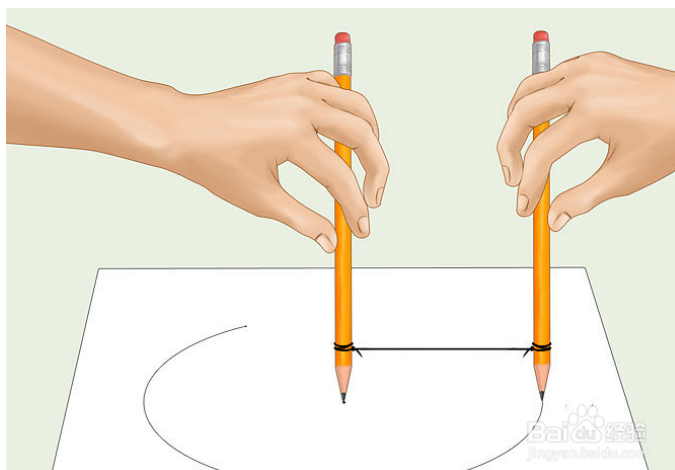
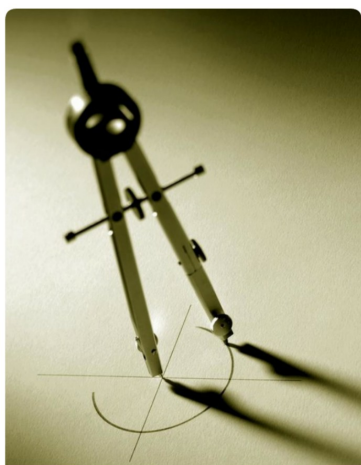


第1讲 旋转中的隐圆问题



知识回顾：

圆的定义：

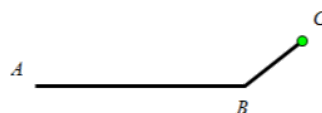
①描述性定义：在一个平面内，线段 OA 绕它 固定 的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所形成的图形叫做 圆，其中固定端点 O 叫做 圆心， OA 叫做 半径。

②集合性定义：平面内到 定点 的距离等于 定长 的点的集合叫做圆，定点叫做 圆心，定长叫做 半径。

思考一：

已知 $AB = 3$, $BC = 2$ 共端点的两条线段如图所示，线段 BC 绕点 B 旋转一周，则 AC 的最大值及最小值是？

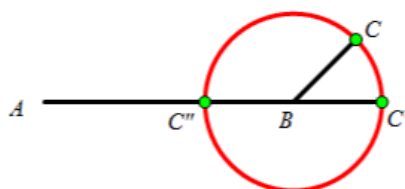
图一



【思路点拨】

画出动点 C 运动轨迹，即如图二所示 $\odot B$ ，与直线 AB 交于 C 、 C' 两点，利用变关系寻找最值，即定点，动点，旋转中心三点共线时。

图二



AC 最小值为 $AC' = 3 - 2 = 1$ A ————— C'

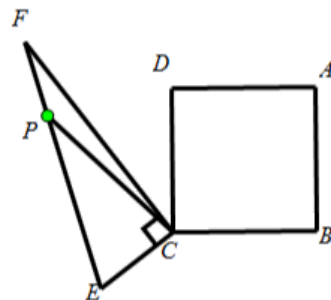
AC 最大值为 $AC' = 3 + 2 = 5$ A ————— C'

！ 总结：

当 A (定点)、 B (圆心)、 C (动点) 三点共线时，出现 AC 的最大值与最小值，即“一箭穿心”

思考二：

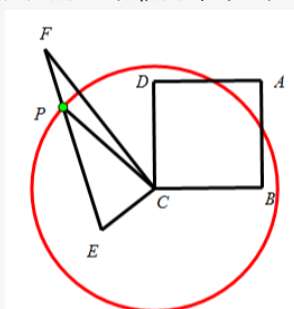
已知，如图一：已知正方形 $ABCD$ ，直角三角形 CEF ，点 P 在线段 EF 上，将 $\triangle CEF$ 绕点 C 旋转 360° ，求 BP 的最值。



图一

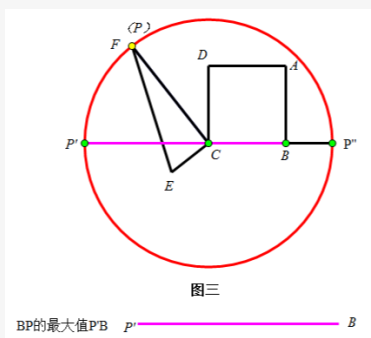
【备注】【解题过程】

1、假设点 P 在 EF 上是固定，画出点 P 的运动轨迹，以 C 为圆心， CP 长为半径画圆如图二。



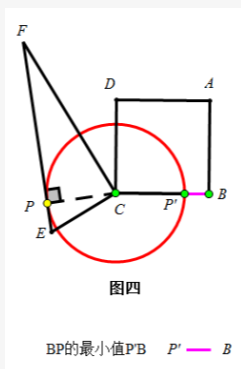
图二

2、因为 P 在 EF 上是动点，所以 CP 大小发生变化，所以圆的半径大小发生变化，其中当点 P 与 F 点重合， CP 有最大值，画出对应圆如图三。



图三

3、当点 P 在 EF 上运动时， CP 长度大小发生变化， CP 的最小值就转化成了点 C 到线段 EF 的长度问题，根据垂线段最短，画出此时对应圆如图四。



图四

4、根据三边关系（三点共线 P 、 C 、 B ），可知 BP 的最大值及最小值。

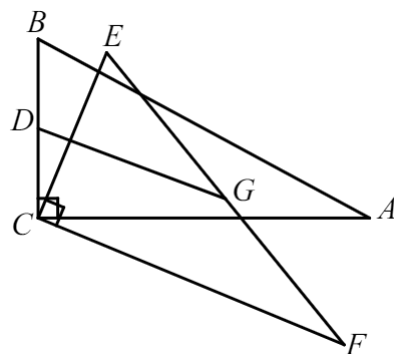
一、 绕某点运动问题

🍎 举个“栗子”

栗子1

1. ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $BC = 4$ ， BC 的中点为 D ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转任意一个角度得到 $\triangle FEC$ ， EF 的中点为 G ，连接 DG ，在旋转的过程中， DG 的最大值是（ ）。



A. 6

B. $2 + 2\sqrt{3}$

C. $4 + \sqrt{3}$

D. $3 + 2\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，

$$\therefore AB = BC \div \sin 30^\circ = 4 \div \frac{1}{2} = 8，$$

$\because BC$ 的中点为 D ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2，$$

连接 CG ，

$\because \triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转任意一个角度得到 $\triangle FEC$ ， EF 的中点为 G ，

$$\therefore CG = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4，$$

由三角形的三边关系得， $CD + CG > DG$ ，

$\therefore D、C、G$ 三点共线时 DG 有最大值，

$$\text{此时 } DG = CD + CG = 2 + 4 = 6。$$

故选 A。

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

栗子2

2. 2017~2018学年12月北京朝阳区八十中学初三上学期月考第27题8分 ★★★★★

在锐角 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4$, $BC = 5$, $\angle ACB = 45^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转, 得到 $\triangle A_1BC_1$.

(1) 如图 1, 当点 C_1 在线段 CA 的延长线上时, 求 $\angle CC_1A_1$ 的度数.

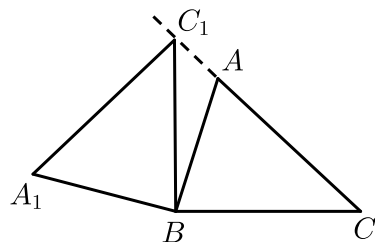


图 1

(2) 如图 2, 连接 AA_1 , CC_1 . 若 $\triangle ABA_1$ 的面积为 4, 求 $\triangle CBC_1$ 的面积.

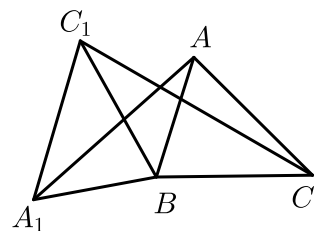


图 2

(3) 如图 3, 点 E 为线段 AB 中点, 点 P 是线段 AC 上的动点, 在 $\triangle ABC$ 绕点 B 按逆时针方向旋转过程中, 点 P 的对应点是点 P_1 , 求出线段 EP_1 长度的取值范围.

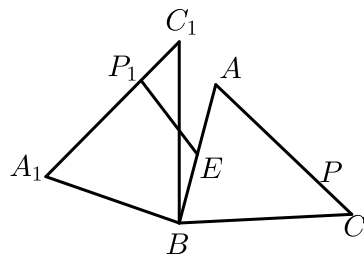


图 3

【答案】 (1) $\angle CC_1A_1 = 90^\circ$.

(2) $S_{\triangle CBC_1} = \frac{25}{4}$.

(3) $\frac{5}{2}\sqrt{2} - 2 \leq EP_1 \leq 7$.

【解析】 (1) $\because$ 由旋转的性质可得: $\angle A_1C_1B = \angle ACB = 45^\circ$, $BC = BC_1$,

$\therefore \angle CC_1B = \angle C_1CB = 45^\circ$.

$\therefore \angle CC_1A_1 = \angle CC_1B + \angle A_1C_1B = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$.

(2) $\because$ 由旋转的性质可得: $\triangle ABC \cong \triangle A_1BC_1$,

$\therefore BA = BA_1$, $BC = BC_1$, $\angle ABC = \angle A_1BC_1$.

$\therefore \frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$, $\angle ABC + \angle ABC_1 = \angle A_1BC_1 + \angle ABC_1$.

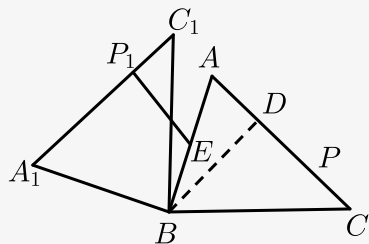
$\therefore \angle ABA_1 = \angle CBC_1$.

$\therefore \triangle ABA_1 \sim \triangle CBC_1$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle CBC_1}} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABA_1} = 4, \therefore S_{\triangle CBC_1} = \frac{25}{4}.$$

(3) 过点 B 作 $BD \perp AC$, D 为垂足,



$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore$ 点 D 在线段 AC 上.

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BD = BC \times \sin 45^\circ = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

①如图 1, 当 P 在 AC 上运动至垂足点 D , $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转, 使点 P 的对应点 P_1 在线段 AB 上时, EP_1 最小. 最小值为:

$$EP_1 = BP_1 - BE = BD - BE = \frac{5}{2}\sqrt{2} - 2.$$

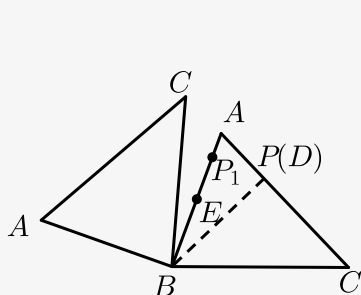


图 1

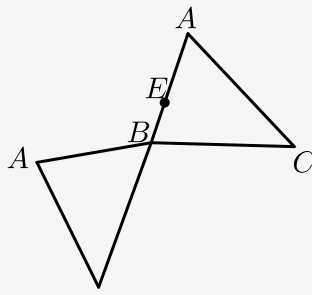


图 2

②如图 2, 当 P 在 AC 上运动至点 C , $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转, 使点 P 的对应点 P_1 在线段 AB 的延长线上时, EP_1 最大.

最大值为: $EP_1 = BC + BE = 5 + 2 = 7$.

所以 $\frac{5}{2}\sqrt{2} - 2 \leq EP_1 \leq 7$.

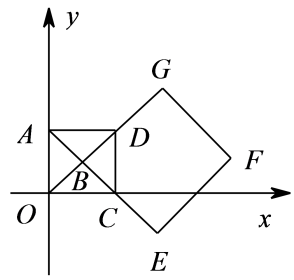
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

独步天下1

3. 2018年天津和平区初三毕业考试第24题 ★★★★★

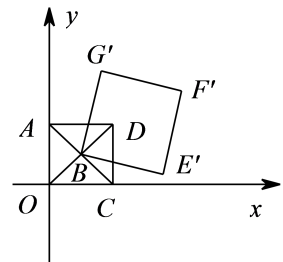
在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 点 $A(0, 1)$, 点 $C(1, 0)$, 正方形 $A OCD$ 的两条对角线的交点为 B , 延长 BD 至点 G , 使 $DG = BD$, 延长 BC 至点 E , 使 $CE = BC$, 以 BG , BE 为邻边做正方形 $BEFG$.

(1) 如图①, 求 OD 的长及 $\frac{AB}{BG}$ 的值.



图①

(2) 如图②, 正方形 $AOCB$ 固定, 将正方形 $BEFG$ 绕点 B 逆时针旋转, 得正方形 $BE'F'G'$, 记旋转角为 $\alpha (0^\circ < \alpha < 360^\circ)$, 连接 AG' .



图②

- ① 在旋转过程中, 当 $\angle BAG' = 90^\circ$ 时, 求 α 的大小.
- ② 在旋转过程中, 求 AF' 的长取最大值时, 点 F' 的坐标及此时 α 的大小 (直接写出结果即可).

【答案】 (1) $OD = \sqrt{2}$, $\frac{AB}{BG} = \frac{1}{2}$.

(2) ① 30° 或 150° .

② $\alpha = 315^\circ$, $F' \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2} \right)$.

【解析】 (1) 如图 1 中,

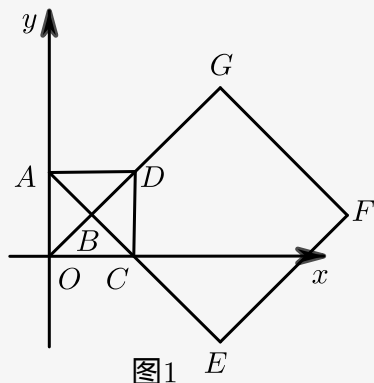


图1

$\because A(0, 1)$,

$\therefore OA = 1$.

$\because$ 四边形 $OADC$ 是正方形,

$\therefore \angle OAD = 90^\circ$, $AD = OA = 1$.

$$\therefore OD = AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} .$$

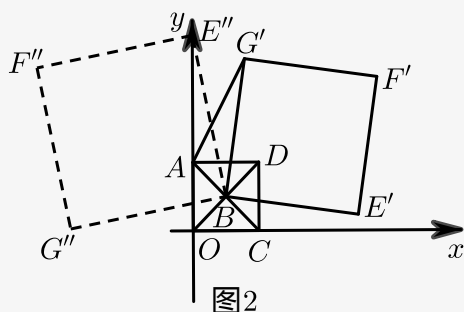
$$\therefore AB = BC = BD = BO = \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

$$\therefore BD = DG ,$$

$$\therefore BG = \sqrt{2} .$$

$$\therefore \frac{AB}{BG} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} .$$

(2) ① 如图 2 中 ,



$$\therefore \angle BAG' = 90^\circ , \quad BG' = 2AB ,$$

$$\therefore \sin \angle AG'B = \frac{AB}{BG'} = \frac{1}{2} .$$

$$\therefore \angle AG'B = 30^\circ .$$

$$\therefore \angle ABG' = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle DBG' = 30^\circ .$$

$$\therefore \text{旋转角 } \alpha = 30^\circ .$$

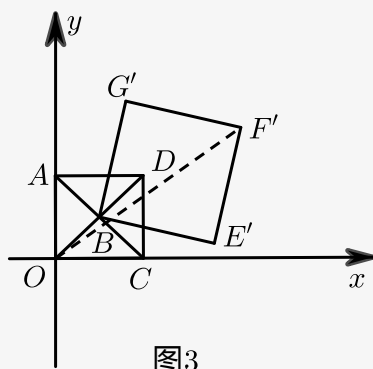
根据对称性可知 ,

当 $\angle ABG'' = 60^\circ$ 时 , $\angle BAG'' = 90^\circ$, 也满足条件 ,

此时旋转角 $\alpha = 150^\circ$,

综上所述 , 旋转角 $\alpha = 30^\circ$ 或 150° 时 , $\angle BAG' = 90^\circ$.

② 如图 3 中 , 连接 OF ,



$\therefore$ 四边形 $BE'F'G'$ 是正方形的边长为 $\sqrt{2}$,

$$\therefore BF' = 2 .$$

$\therefore$ 当 $\alpha = 315^\circ$ 时 , A 、 B 、 F' 在一条直线上时 ,

AF' 的长最大 , 最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 2$.

$$\text{此时 } \alpha = 315^\circ, F' \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2} \right).$$

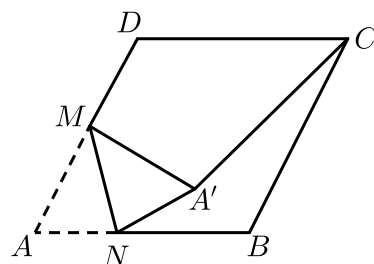
【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

二、到某点定长问题

栗子3

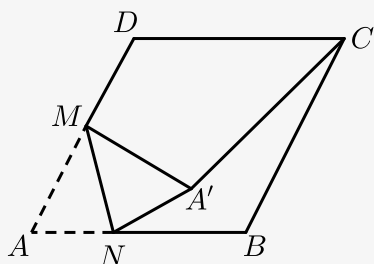
4. 2019~2020学年6月四川成都锦江区嘉祥外国语学校初二下学期周测A卷第24题4分 ★★★

如图，在边长为4的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 边的中点，点 N 是 AB 边上一动点，将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在的直线翻折得到 $\triangle A'MN$ ，连接 $A'C$ ，则线段 $A'C$ 长度的最小值是_____。



【答案】 $2\sqrt{7} - 2$

【解析】 如图所示：



$\because MA'$ 是定值， $A'C$ 长度取最小值时，即 A' 在 MC 上时，
 过点 M 作 $MF \perp DC$ 于点 F ，
 $\because$ 在边长为4的菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， M 是 AD 中点，
 $\therefore MD = 2$ ， $\angle FDM = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle FMD = 30^\circ$ ，
 $\therefore FD = \frac{1}{2}MD = 1$ ，
 $\therefore FM = DM \times \cos 30^\circ = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore MC = \sqrt{FM^2 + CF^2} = 2\sqrt{7}$ ，
 $\therefore A'C = MC - MA' = 2\sqrt{7} - 2$ 。
 故答案为： $2\sqrt{7} - 2$ 。

【标注】【知识点】菱形的性质

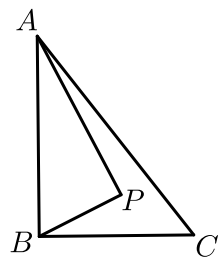
【知识点】旋转的性质

三、定角问题

栗子4

5. 2016年安徽中考真题第10题4分 ★★★

如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB \perp BC$ ， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内部的一个动点，且满足 $\angle PAB = \angle PBC$ ，则线段 CP 长的最小值为（ ）。



A. $\frac{3}{2}$

B. 2

C. $\frac{8\sqrt{13}}{13}$

D. $\frac{12\sqrt{13}}{13}$

【答案】B

【解析】 $\because AB \perp BC$ ，

$$\therefore \angle ABP + \angle PBC = 90^\circ,$$

$$\because \angle PAB = \angle PBC,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle ABP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 P 在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上，连接 OC 交 $\odot O$

于点 P ，此时 PC 最小，

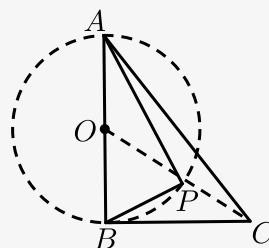
在 $\text{Rt}\triangle BCO$ 中，

$$\because \angle OBC = 90^\circ, BC = 4, OB = 3,$$

$$\therefore OC = \sqrt{BO^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore PC = OC - OP = 5 - 3 = 2.$$

$\therefore PC$ 最小值为2.

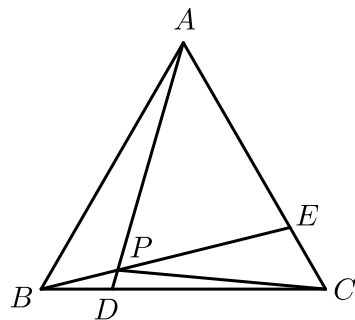


【标注】【知识点】勾股定理的综合应用

独步天下2

6. 2019~2020学年四川成都武侯区成都七中初三上学期期末模拟第23题4分 ★★★

如图，边长为 3 的等边 $\triangle ABC$ ， D 、 E 分别为边 BC 、 AC 上的点，且 $BD = CE$ ， AD 、 BE 交于 P 点，则 CP 的最小值为 _____。



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 $\because$ 在等边 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$$AB = BC = 3, BD = CE,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE (\text{SAS}).$$

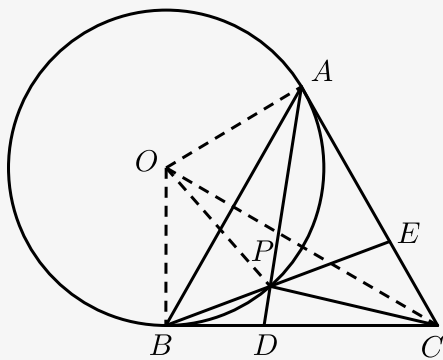
$$\therefore \angle CBE = \angle BAP.$$

$$\therefore \angle CBE + \angle ABP = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle APE = \angle BAP + \angle ABP = \angle CBE + \angle ABP = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle APB = 120^\circ.$$

作 $\triangle APB$ 的外接圆 $\odot O$ ，连接 OA 、 OB 、 OP 、 OC ，如图，



则点 P 在 $\widehat{APB}$ 是运动，

$$\therefore OA = OB, AC = BC, OC = OC,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC (\text{SSS}).$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OBC, \angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB.$$

$$\therefore OA = OP = OB,$$

$$\therefore \angle OAP = \angle OPA, \angle OBP = \angle OPB.$$

$$\therefore \angle OAP + \angle OBP = \angle OPA + \angle OPB = \angle APB = 120^\circ.$$

$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - \angle OAP - \angle OBP - \angle APB = 120^\circ.$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ . \\
&\therefore \angle OAC = 180^\circ - \angle AOC - \angle ACO = 90^\circ . \\
&\therefore OA = \frac{1}{2} OC . \\
&\therefore OC = 2OA . \\
&\therefore OA^2 + AC^2 = OC^2 , \\
&\therefore OA^2 + AC^2 = (2OA)^2 . \\
&\therefore OA = \sqrt{3} . \\
&\therefore OC = 2OA = 2\sqrt{3} . \\
&\therefore PC \geq OC - OP , \\
&\therefore PC \geq \sqrt{3} . \\
&\therefore PC \text{ 的最小值为 } \sqrt{3} . \\
&\text{故答案为: } \sqrt{3} .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等边三角形的性质

【能力】运算能力

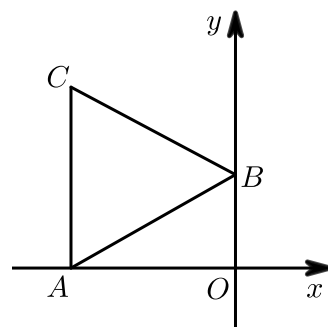
四、构造中位线问题

栗子5

7. 2020年天津和平区初三中考三模第24题10分 ★★★★★

在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-3, 0)$ ，点 $B(0, \sqrt{3})$ ．以 AB 为一边作等边三角形 ABC ，点 C 在第二象限．

(1) 如图①，求点 C 的坐标．



图①

(2) 将 $\triangle AOB$ 绕点 B 顺时针旋转得 $\triangle A'O'B$ ，点 A 、 O 旋转后的对应点为 A' 、 O' ．

① 如图②，当旋转角为 30° 时， $A'B$ 、 $A'O'$ 与 AC 分别交于点 E 、 F ． $A'O'$ 与 AB 交于点 G ，求 $\triangle A'O'B$ 与 $\triangle ABC$ 公共部分面积 S 的值．

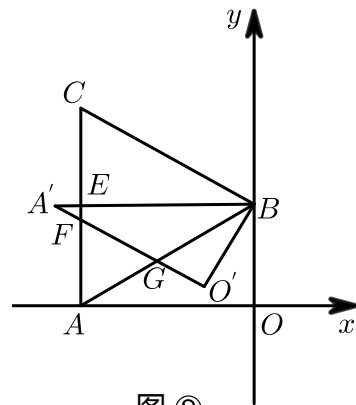


图 ②

② 若 P 为线段 CO' 的中点, 求 AP 长的取值范围 (直接写出结果即可) .

【答案】 (1) $(-3, 2\sqrt{3})$.

(2) ① $6 - \frac{5}{2}\sqrt{3}$.

② $3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq AP \leq 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】 (1) $\because A(-3, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$,

$\therefore OA = 3$, $OB = \sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中 ,

$\therefore \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \angle BAO = 30^\circ$,

$\therefore AB = 2OB = 2\sqrt{3}$,

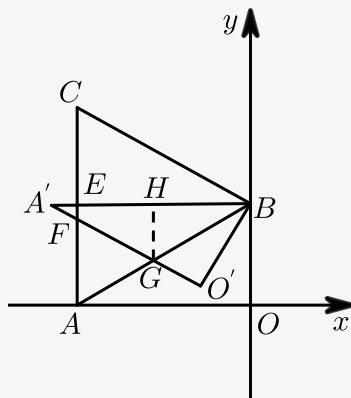
$\because \triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$\therefore \angle CAB = 60^\circ$, $AC = AB = 2\sqrt{3}$.

$\therefore \angle CAO = 90^\circ$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-3, 2\sqrt{3})$.

(2) ①



过点 G 作 $GH \perp A'B$ 于点 H ,

$\because$ 将 $\triangle AOB$ 顺时针旋转 30° , 得 $\triangle A'O'B$,

$\therefore A'B = AB = 2\sqrt{3}$, $\angle A' = \angle BAO = 30^\circ$, $\angle A'BA = 30^\circ$.

$\therefore \angle A' = \angle A'BA = 30^\circ$,

$$\therefore GA' = GB,$$

$$\therefore GH \perp A'B,$$

$$\therefore A'H = \frac{1}{2}A'B = \sqrt{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle A'HG$ 中,

$$\therefore \tan \angle BA'G = \frac{GH}{A'H},$$

$$\therefore GH = \sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = 1.$$

$$\therefore S_{\triangle A'BG} = \frac{1}{2}A'B \cdot GH = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle CAB = 60^\circ, \angle A'BG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A'EF = \angle CAB + \angle A'BG = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle BEA$ 中,

$$\therefore \sin \angle CAB = \frac{BE}{AB},$$

$$\therefore BE = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle A'EF \text{ 中, } A'E = A'B - BE = 2\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore EF = A'E \cdot \tan 30^\circ = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle A'EF} = \frac{1}{2}A'E \cdot EF = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3)(2 - \sqrt{3}) = \frac{7}{2}\sqrt{3} - 6,$$

$$\therefore S = S_{\triangle A'BG} - S_{\triangle A'EF} = 6 - \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

②

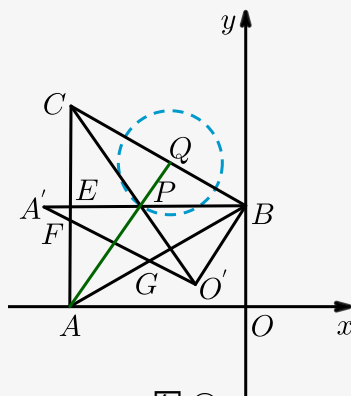


图 ②

如图所示, 取 BC 中点 Q , 则 $Q\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$,

连接 PQ , AQ ,

$\therefore P$ 为 OC 中点, Q 为 BC 中点,

$\therefore PQ$ 为 $\triangle CO'B$ 中位线,

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}O'B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore P$ 在以 Q 为圆心, 以 PQ 为半径的圆上运动,

$$AQ = \sqrt{\left(-3 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2} = 3,$$

当 P 落在线段 AQ 上时, 此时 AP 最小, 为 $AQ - PQ = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

当 P 落在线段 AQ 延长线时, 此时 AP 最大, 为 $AQ + PQ = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

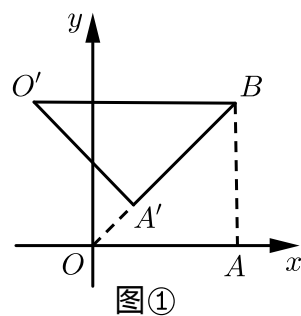
$$\therefore 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq AP \leq 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

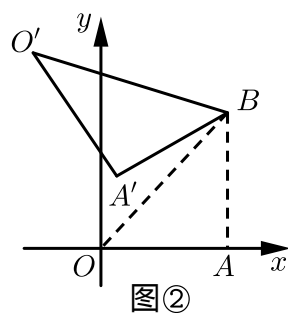
8. 2020年天津红桥区初三中考二模第24题10分 ★★★

在平面直角坐标系中，点 $A(2,0)$ ，点 $B(2,2)$ ，将 $\triangle OAB$ 绕点 B 顺时针旋转，得 $\triangle O'A'B$ ，点 A ， O 旋转后的对应点为 A' ， O' ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，当 $\alpha = 45^\circ$ 时，求点 A' 的坐标。



(2) 如图②，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，求点 A' 的坐标。



(3) 连接 OA' ，设线段 OA' 的中点为 M ，连接 $O'M$ 。求线段 $O'M$ 的长的最小值（直接写出结果即可）。

【答案】(1) $(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ 。

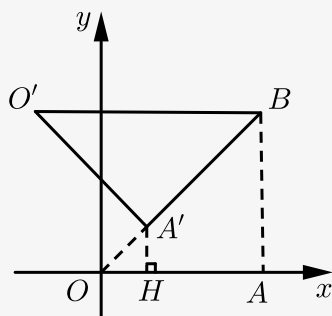
(2) $(2 - \sqrt{3}, 1)$ 。

(3) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ 。

【解析】(1) 由旋转可知 $AB = A'B = 2$ ， $OB = 2\sqrt{2}$ ，

故 $OA' = OB - A'B = 2\sqrt{2} - 2$ ，

作 $A'H \perp OA$ 于 H ，



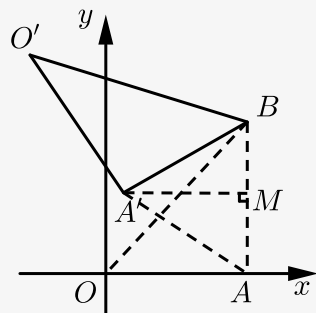
$$\therefore OH = A'H = \frac{OA'}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2},$$

故 $A'(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

(2) 由旋转知: $AB = A'B$, $\angle ABA' = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABA'$ 为等边三角形,

作 $A'M \perp AB$ 于 M ,

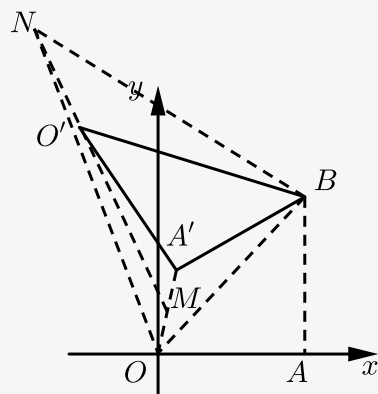


$$AM = AB \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$BM = AM = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore A'(2 - \sqrt{3}, 1).$$

(3) 延长 $A'O'$ 至 N 点, 使 $A'O' = O'N$, 连接 ON , BN ,



$$\therefore A'N = A'O' + O'N = 4, \quad A'B = 2,$$

$$\therefore BN = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$\therefore N$ 在以 B 为圆心, 以 $2\sqrt{5}$ 为半径为直径的圆,

当 N 在 BD 延长线时, ON 有最小,

$$ON_{\min} = BN - OB = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2},$$

$$\text{而 } O'M_{\min} = \frac{1}{2}ON_{\min} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

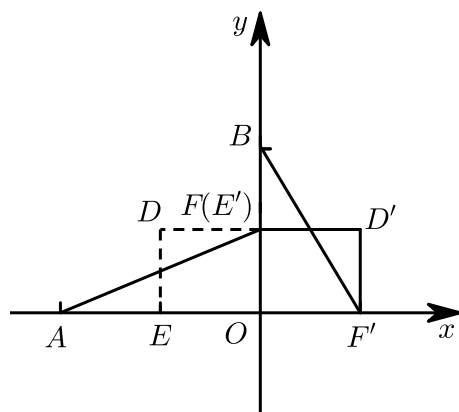
【标注】【知识点】坐标系中的旋转

五、切线问题

9. 2014年天津中考真题第24题10分 ★★★★★

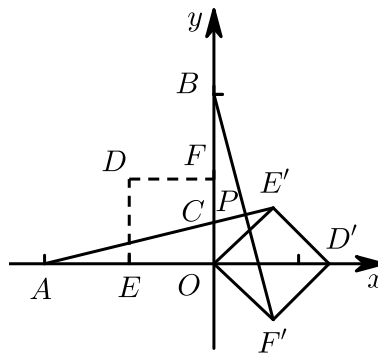
在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(-2, 0)$ ，点 $B(0, 2)$ ，点 E ，点 F 分别为 OA ， OB 的中点．若正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转，得正方形 $OE'D'F'$ ，记旋转角为 α ．

(1) 如图①，当 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AE' ， BF' 的长．



图①

(2) 如图②，当 $\alpha = 135^\circ$ ，求证 $AE' = BF'$ ，且 $AE' \perp BF'$ ．



图②

(3) 若直线 AE' 与直线 BF' 相交于点 P ，求点 P 的纵坐标的最大值（直接写出结果即可）．

【答案】 (1) AE' ， BF' 的长都等于 $\sqrt{5}$ ．

(2) 证明见解析．

(3) 点 P 的纵坐标的最大值为 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ．

【解析】 (1) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时，点 E' 与点 F 重合，如图①．

$\because$ 点 $A(-2, 0)$ 点 $B(0, 2)$ ，

$\therefore OA = OB = 2$ ．

$\because$ 点 E ，点 F 分别为 OA ， OB 的中点，

$\therefore OE = OF = 1$ ，

$\because$ 正方形 $OE'D'F'$ 是正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到的，

$\therefore OE' = OE = 1$ ， $OF' = OF = 1$ ．

在 $Rt\triangle AE'O$ 中， $AE' = \sqrt{OA^2 + OE'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ．

在 $Rt\triangle BOF'$ 中， $BF' = \sqrt{OB^2 + OF'^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ．

$\therefore AE', BF'$ 的长都等于 $\sqrt{5}$.

(2) 当 $\alpha = 135^\circ$ 时, 如图② .

$\therefore$ 正方形 $OE'D'F'$ 是由正方形 $OEDF$ 绕点 O 顺时针旋转 135° 所得 ,

$\therefore \angle AOE' = \angle BOF' = 135^\circ$.

在 $\triangle AOE'$ 和 $\triangle BOF'$ 中 ,

$$\begin{cases} AO = BO \\ \angle AOE' = \angle BOF' , \\ OE' = OF' \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOE' \cong \triangle BOF' (SAS)$.

$\therefore AE' = BF'$, 且 $\angle OAE' = \angle OBF'$.

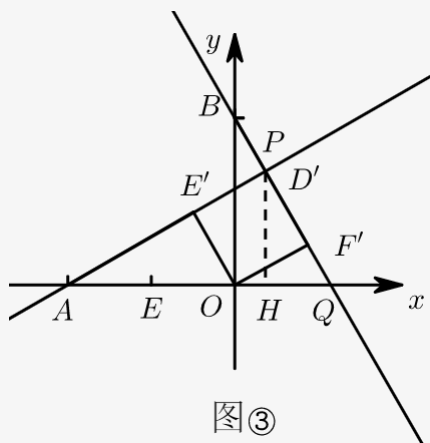
$\therefore \angle ACB = \angle CAO + \angle AOC = \angle CBP + \angle CPB$, $\angle CAO = \angle CBP$,

$\therefore \angle CPB = \angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore AE' \perp BF'$.

(3) 方法一 : 在第一象限内 , 当点 D' 与点 P 重合时 , 点 P 的纵坐标最大 .

过点 P 作 $PH \perp x$ 轴 , 垂足为 H , 如图③所示 .



图③

$\therefore \angle AE'O = 90^\circ$, $E'O = 1$, $AO = 2$,

$\therefore \angle E'AO = 30^\circ$, $AE' = \sqrt{3}$.

$\therefore AP = \sqrt{3} + 1$.

$\therefore \angle AHP = 90^\circ$, $\angle PAH = 30^\circ$,

$\therefore PH = \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

$\therefore$ 点 P 的纵坐标的最大值为 $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

方法二 : $\therefore \angle BPA = \angle BOA = 90^\circ$, 点 P 、 B 、 A 、 O 四点共圆 ,

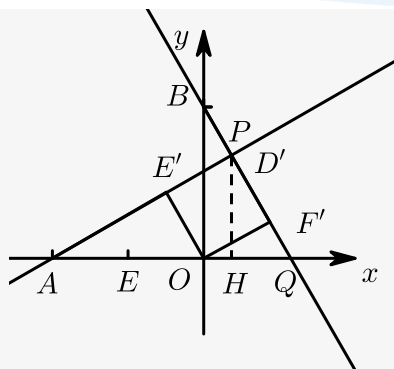
$\therefore$ 当点 P 在劣弧 OB 上运动时 , 点 P 的纵坐标随着 $\angle PAO$ 的增大而增大 .

$\therefore OE' = 1$, $\therefore$ 点 E' 在以点 O 为圆心 , 1 为半径的圆 O 上运动 ,

$\therefore$ 当 AP 与 $\odot O$ 相切时 , $\angle E'AO$ (即 $\angle PAO$) 最大 ,

此时 $\angle AE'O = 90^\circ$, 点 D' 与点 P 重合 , 点 P 的纵坐标达到最大 .

过点 P 作 $PH \perp x$ 轴 , 垂足为 H .



$$\because \angle AE'O = 90^\circ, E'O = 1, AO = 2,$$

$$\therefore \angle E'AO = 30^\circ, AE' = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AP = \sqrt{3} + 1.$$

$$\because \angle AHP = 90^\circ, \angle PAH = 30^\circ,$$

$$\therefore PH = \frac{1}{2}AP = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的纵坐标的最大值为 } \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

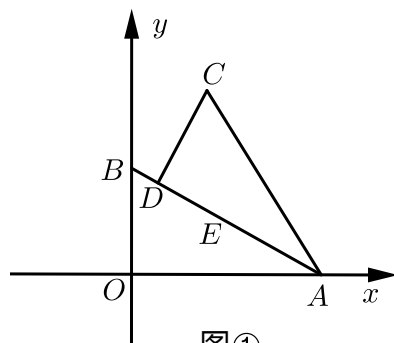
六、面积最值问题

栗子7

10. 2020年天津河西区初三中考一模第24题10分 ★★★

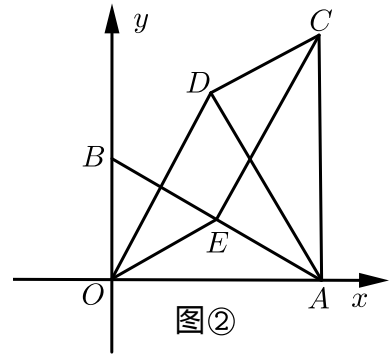
在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，点 $B(0, 1)$ ，点 E 是边 AB 中点，把 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转，得 $\triangle ADC$ ，点 O ， B 旋转后的对应点分别为 D ， C ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，当点 D 恰好在 AB 上时，求点 D 的坐标。



图①

(2) 如图②，若 $\alpha = 60^\circ$ 时，求证：四边形 $OECD$ 是平行四边形。



(3) 连接 OC ，在旋转的过程中，求 $\triangle OEC$ 面积的最大值（直接写出结果即可）。

【答案】 (1) $\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 。

(2) 证明见解析。

(3) $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$ 。

【解析】 (1) 由题意： $OA = \sqrt{3}$ ， $OB = 1$ ，

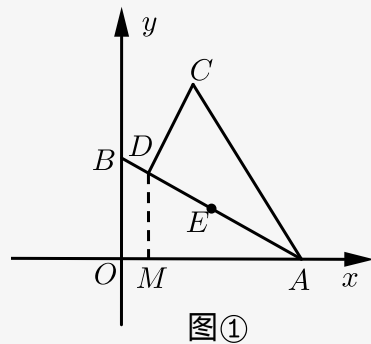
$$\therefore \text{在 } \triangle AOB \text{ 中, } \angle AOB = 90^\circ, \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

$\because \triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转得 $\triangle ADC$ ，

$$\therefore DA = OA = \sqrt{3},$$

过点 D 作 $DM \perp OA$ 于点 M ，如图①：



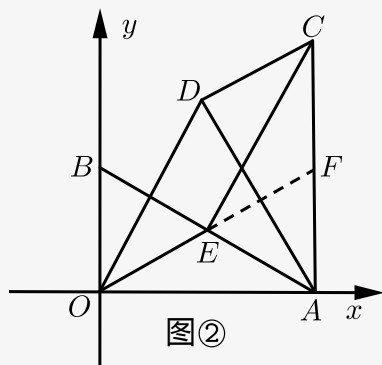
在 $\text{Rt}\triangle DAM$ 中， $\angle BAO = 30^\circ$ ，

$$\therefore DM = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{AM}{AD}, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AM}{\sqrt{3}}, AM = \frac{3}{2},$$

$$\therefore OM = AO - AM = \sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

$$\therefore D\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(2) 延长 OE 交 AC 于点 F ，如图②：



在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，点 E 为 AB 中点， $\angle BAO = 30^\circ$ ，

$$\therefore OE = BE = AE,$$

又 $\because \angle ABO = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle BOE$ 是等边三角形，

$$\therefore OE = OB, \angle BOE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EOA = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

由旋转性质得 $DC = OB$ ，

$$\therefore OE = DC,$$

$$\because \alpha = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = 60^\circ,$$

由旋转性质知： $\angle DAC = \angle OAB = 30^\circ$ ， $\angle DCA = \angle OBA = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle OAC = \angle OAD + \angle DAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OFA = 90^\circ - \angle EOA = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle OFA,$$

$$\therefore OE \parallel DC,$$

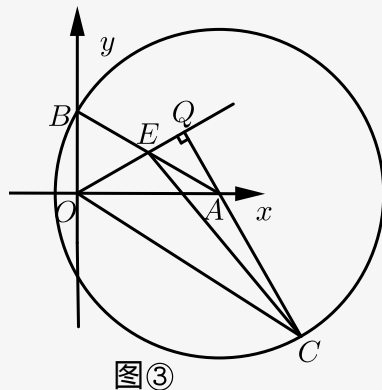
$$\text{又} \because OE = DC,$$

$\therefore$ 四边形 $OECD$ 是平行四边形。

(3) 以 OE 为底，若求 $\triangle OEC$ 面积最大则求高最大即可即点 C 到直线 OE 的距离最大，

$\therefore$ 以点 A 为圆心， AB 为半径画圆即为点 C 的运动轨迹，当点 C 在优弧上，且

$CA \perp OE$ 于 Q 时，高最大，如图③：



$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AOB \text{ 中, } AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{3 + 1} = 2,$$

$$\therefore AC = AB = 2,$$

$$\text{又} \because \angle BEO = \angle QEA = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AEQ \text{ 中, } \sin 60^\circ = \frac{AQ}{AE}, \quad AQ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore CQ = AC + AQ = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\max} = \frac{1}{2} \cdot OE \cdot CQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{4 + \sqrt{3}}{4}.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】坐标与距离

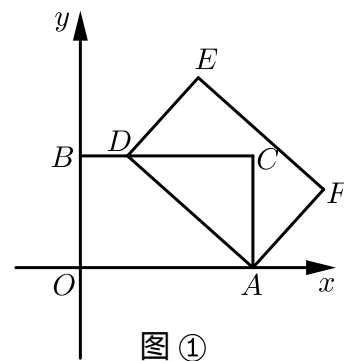
【知识点】坐标与面积

【知识点】坐标系中的旋转-图形关于原点的旋转

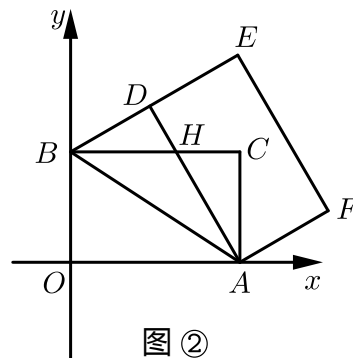
11. 2018年天津中考真题第24题10分 ★★★★★

在平面直角坐标系中，四边形 $AOBC$ 是矩形，点 $O(0,0)$ ，点 $A(5,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，以点 A 为中心，顺时针旋转矩形 $AOBC$ ，得到矩形 $ADEF$ ，点 O ， B ， C 的对应点分别为 D ， E ， F 。

(1) 如图①，当点 D 落在 BC 边上时，求点 D 的坐标。



(2) 如图②，当点 D 落在线段 BE 上时， AD 与 BC 交于点 H 。



① 求证 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ 。

② 求点 H 的坐标。

(3) 记 K 为矩形 $AOBC$ 对角线的交点, S 为 $\triangle KDE$ 的面积, 求 S 的取值范围 (直接写出结果即可) .

【备注】 (3) 问可采用动静互换思想:

D 、 E 绕点 A 旋转, 可转化为 D 、 E 不动, K 绕 A 点旋转, 因此画出 K 的轨迹后, 延长 DA 与圆的两个交点分别为高的最大最小值

【答案】 (1) 点 D 的坐标为 $(1, 3)$.

(2) ① 证明见解析 .

② 点 H 的坐标为 $\left(\frac{17}{5}, 3\right)$.

(3) $\frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}$.

【解析】 (1) 方法一: $\because$ 点 $A(5, 0)$, 点 $B(0, 3)$,

$\therefore OA = 5, OB = 3$,

$\because$ 四边形 $AOBC$ 是矩形,

$\therefore AC = OB = 3, BC = OA = 5, \angle OBC = \angle C = 90^\circ$,

$\because$ 矩形 $ADEF$ 是由矩形 $AOBC$ 旋转得到的,

$\therefore AD = AO = 5$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, 有 $AD^2 = AC^2 + DC^2$,

$\therefore DC = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore BD = BC - DC = 1$,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(1, 3)$.

方法二: 如图①中,

$\because A(5, 0), B(0, 3)$,

$\therefore OA = 5, OB = 3$,

$\because$ 四边形 $AOBC$ 是矩形,

$\therefore AC = OB = 3, OA = BC = 5$,

$\angle OBC = \angle C = 90^\circ$,

$\because$ 矩形 $ADEF$ 是由矩形 $AOBC$ 旋转得到,

$\therefore AD = AO = 5$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = 4$,

$\therefore BD = BC - CD = 1$,

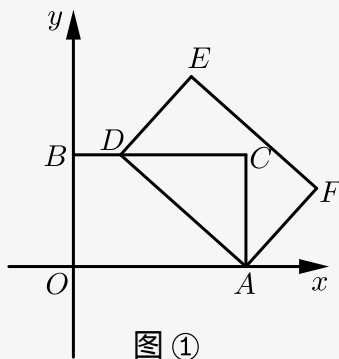
$\therefore D(1, 3)$.

(2) ① 方法一: 由四边形 $ADEF$ 是矩形, 得 $\angle ADE = 90^\circ$,

又点 D 在线段 BE 上,

得 $\angle ADB = 90^\circ$,

由 (I) 可知, $AD = AO$, 又 $AB = AB, \angle AOB = 90^\circ$,



$$\therefore \text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle AOB.$$

方法二：①如图②中，

由四边形 $ADEF$ 是矩形，得到 $\angle ADE = 90^\circ$ ，

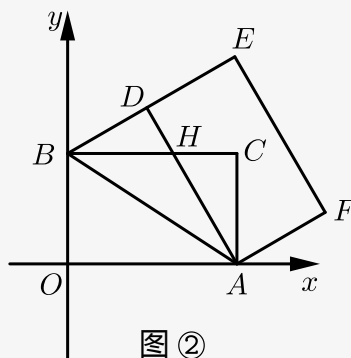
$\therefore$ 点 D 在线段 BE 上，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

由(1)可知， $AD = AO$ ，又 $AB = AB$ ，

$$\angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle AOB (\text{HL}).$$



② 方法一：由 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ ，得 $\angle BAD = \angle BAO$ ，

又在矩形 $AOBC$ 中， $OA \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle CBA = \angle OAB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CBA.$$

$$\therefore BH = AH,$$

设 $BH = t$ ，则 $AH = t$ ， $HC = BC - BH = 5 - t$ 。

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中，有 $AH^2 = AC^2 + HC^2$ ，

$$\therefore t^2 = 3^2 + (5 - t)^2,$$

$$\text{解得 } t = \frac{17}{5}.$$

$$\therefore BH = \frac{17}{5}.$$

$$\therefore \text{点 } H \text{ 的坐标为 } \left(\frac{17}{5}, 3 \right).$$

方法二：如图②中，

由 $\triangle ADB \cong \triangle AOB$ ，得到 $\angle BAD = \angle BAO$ ，

又在矩形 $AOBC$ 中， $OA \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle CBA = \angle OAB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CBA,$$

$\therefore BH = AH$ ，设 $AH = BH = m$ ，则

$$HC = BC - BH = 5 - m,$$

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中，

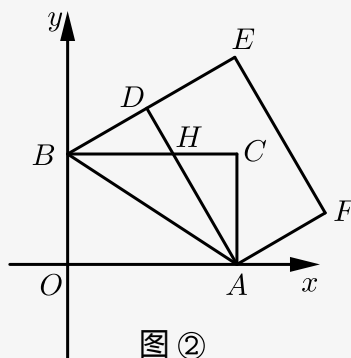
$$\therefore AH^2 = HC^2 + AC^2,$$

$$\therefore m^2 = 3^2 + (5 - m)^2,$$

$$\therefore m = \frac{17}{5},$$

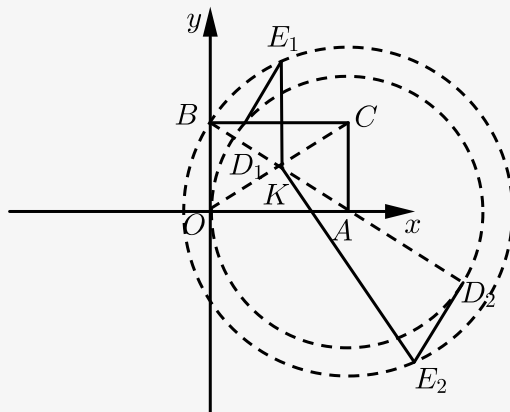
$$\therefore BH = \frac{17}{5},$$

$$\therefore H \left(\frac{17}{5}, 3 \right).$$



(3) 方法一：当 DE 与小 $\odot A$ 相切时取得最值，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中,



$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

$$\therefore AK = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{34}}{2};$$

$$\textcircled{1} D_1K = AD_1 - AK = 5 - \frac{\sqrt{34}}{2},$$

$$S_{\triangle D_1E_1K} = \frac{1}{2} \cdot D_1K \cdot D_1E = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 - \frac{\sqrt{34}}{2}\right) = \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4};$$

$$\textcircled{2} D_2K = AD_2 + AK = 5 + \frac{\sqrt{34}}{2},$$

$$S_{\triangle D_2E_2K} = \frac{1}{2} \cdot D_2K \cdot D_2E = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 + \frac{\sqrt{34}}{2}\right) = \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4};$$

$$\therefore \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}.$$

方法二: 如图③中,

当点 D 在线段 BK 上时,

$\triangle DEK$ 的面积最小, 最小值

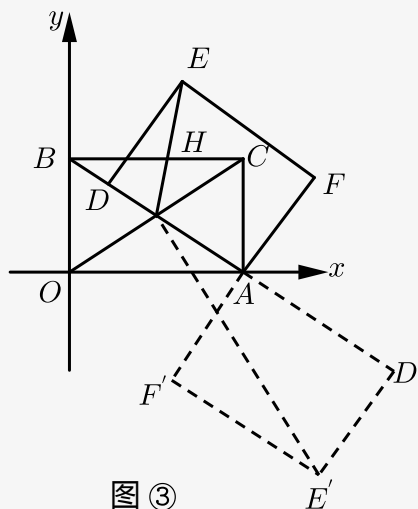


图 ③

$$= \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DK = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 - \frac{\sqrt{34}}{2}\right),$$

$$= \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4}$$

当点 D 在 BA 的延长线上时,

$$\triangle D'E'K \text{ 的面积最大, 最大面积 } -1 \frac{1}{2} \times D'E' \times KD' = \frac{1}{2} \times 3 \times \left(5 + \frac{\sqrt{34}}{2}\right),$$

$$= \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}$$

$$\text{综上所述, } \frac{30 - 3\sqrt{34}}{4} \leq S \leq \frac{30 + 3\sqrt{34}}{4}.$$

